ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SEMESTRAL UNI

TRIGONOMETRÍA

Tema: Coordenadas polares

Dirigida - Semana 24

www.academiacesarvallejo.edu.pe

PROBLEMA 1

1. Un móvil se desplaza sobre una circunferencia de centro y radio $C = (4,75°)$ y $R = 2$ respectivamente, en cierto instante el móvil pasa por los puntos A y B siendo A el de mayor distancia al polo y B el de mayor ángulo polar. Entonces las coordenadas polares de A y B son

A) $A(6,75°); B(2\sqrt{3}, 105°)$

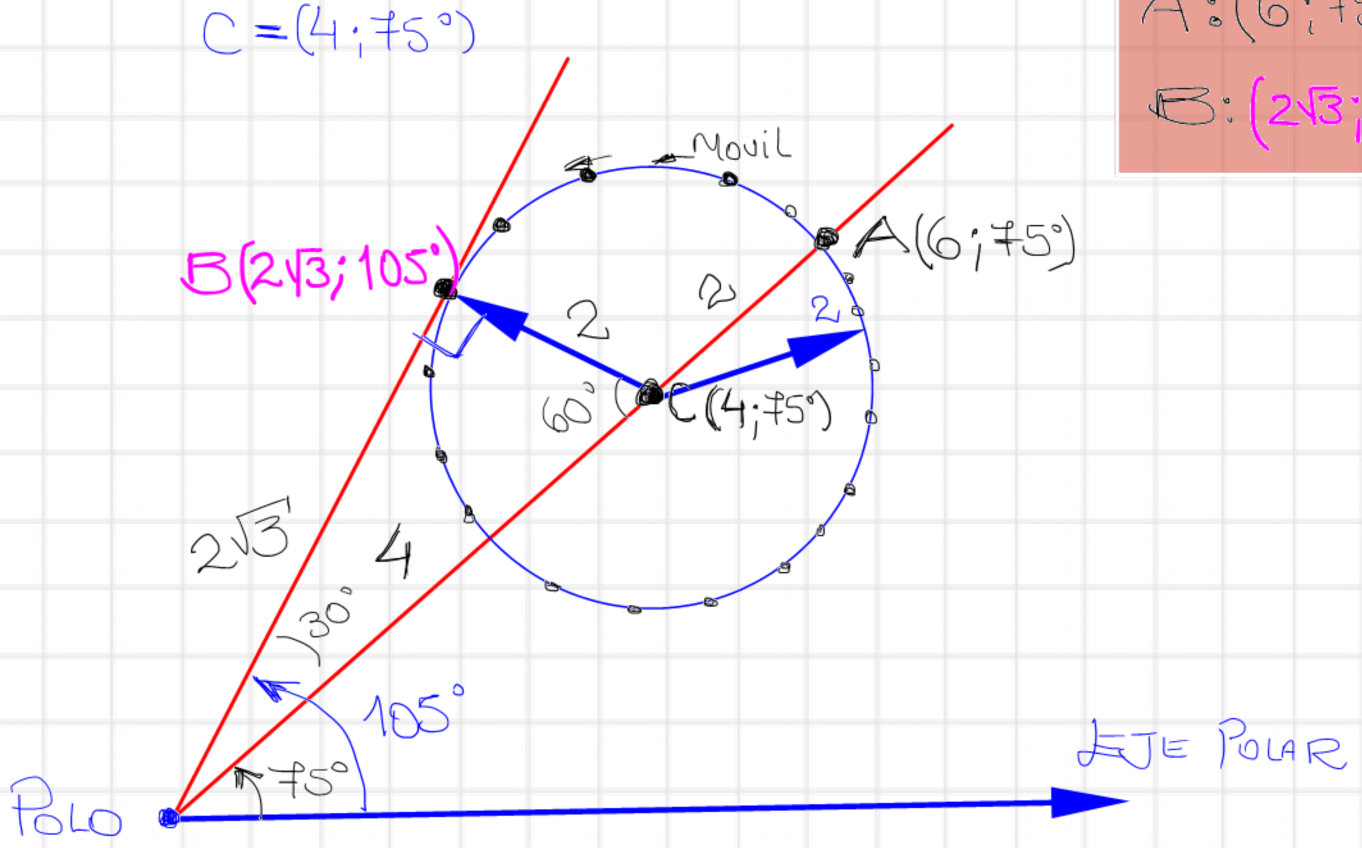
B) $A(4,75°); B(2\sqrt{3}, 105°)$

C) $A(6,75°); B(2,105°)$

D) $A(6,75°); B(2\sqrt{3}, 45°)$

E) $A(2,75°); B(2\sqrt{3}, 105°)$

RESOLUCIÓN



Piden:

A: (6; 75°)

B: (2√3; 105°)

PROBLEMA 2

2. Desde una torre de control mediante un plano polar se monitorea el desplazamiento de una avioneta que viaja en línea recta y a la misma altura que la torre, siendo visto en los puntos $A = (4, 30°)$ y $B = (6, 150°)$ entonces cual es la mínima distancia de la torre hacia la trayectoria que sigue la avioneta (considere que la torre de control está ubicada en el polo del plano polar)

A) $\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

B) $6\sqrt{3}$

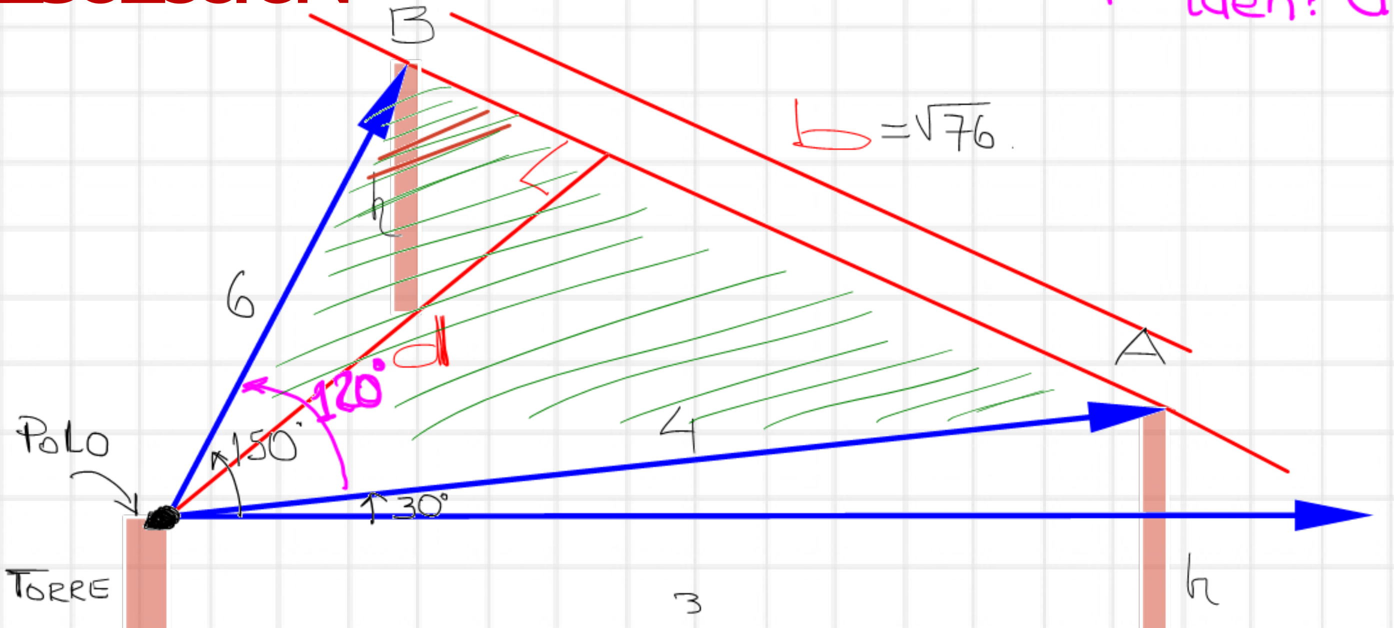
C) $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

D) $2\sqrt{19}$

E) $\frac{3\sqrt{3}}{19}$

RESOLUCIÓN

Piden: d



$$\text{Área } \Delta PBA = \frac{4 \times 6 \operatorname{sen} 120°}{2} = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \quad \dots (I)$$

Calculando b, por Teorema de cosenos

$$b^2 = 4^2 + 6^2 - 2(4)(6)\cos 120°$$

$$b^2 = 16 + 36 - 8 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$b^2 = 52 + 24 = 76$$

$$b = \sqrt{76}$$

$$\text{Á}_{\Delta PBA} = \frac{\sqrt{76}\, d}{2} \quad \dots (II)$$

IGUALANDO (I) Y (II)

$$\frac{\sqrt{76}\, d}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{19}\, d}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$d = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

PROBLEMA 3

3. Los micrófonos cardioides son unidireccionales, lo que se traduce en una mayor sensibilidad hacia los sonidos que le llegan por su parte frontal y un mínimo de sensibilidad a los que le llegan por su parte posterior.

Si la representación rectangular de la sensibilidad del sonido es $(x^2+y^2-x)^2 = x^2+y^2$ entonces su representación polar es

A) $r = 2 - cos\theta$

B) $r = 2 + cos\theta$

C) $r = 1 - cos\theta$

D) $r = 1 + cos\theta$

E) $r = cos\theta$

RESOLUCIÓN

$$(x^2+y^2-x)^2 = x^2+y^2$$

Sabemos: $x = r\cos\theta$; $y = r\,\text{sen}\,\theta$

$$r^2 = x^2+y^2$$

$$(r^2 - r\cos\theta)^2 = r^2$$

$$(r(r-\cos\theta))^2 = r^2$$

$$r^2(r-\cos\theta)^2 = r^2$$

$$(r-\cos\theta)^2 = 1$$

*) $r - \cos\theta = 1 \Rightarrow r = 1+\cos\theta$ ✓ CLAVE (D)

*) $r - \cos\theta = -1 \Rightarrow r = -1+\cos\theta$

PROBLEMA 4

4. El desplazamiento de una partícula sigue la siguiente ecuación polar

$$r = 2acos\theta + 2bsen\theta$$

Determine la representación cartesiana de la curva e indique las coordenadas del centro de la curva.

A) $(a; b)$

B) $(b; a)$

C) $(2a; 2b)$

D) $(2b; 2a)$

E) $(a + 1; b + 1)$

RESOLUCIÓN

Dato: $r = 2a\cos\theta + 2b\,\text{Sen}\theta$

Se sabe: $x = r\cos\theta$; $y = r\,\text{sen}\theta$

$$r \times r = 2a \times (r\cos\theta) + 2b \times (r\,\text{Sen}\theta)$$

$$r^2 = 2ax + 2by$$

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2by$$

$$\underbrace{x^2 - 2ax + a^2} + \underbrace{y^2 - 2by + b^2} = 0 + a^2 + b^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$$

El centro es: $(a; b)$

PROBLEMA 5

Una Lemniscata de Bernoulli es un lugar geométrico en el cual el producto de distancias a dos puntos fijos (–1; 0) y (1; 0) llamados focos es una constante igual a 1 y se representa en el sistema cartesiano según
$x^4+y^4=2x^2-2y^2-2x^2y^2$.
Determine su representación en coordenadas polares.

A) $r^2=2\cos 2\theta$ B) $r^2=2\cos\theta$ C) $r=2\cos 2\theta$
D) $r^2=2\operatorname{sen}\theta$ E) $r^2=2\operatorname{sen}2\theta$

RESOLUCIÓN

Piden: Pasar al Sistema Polar

LEMNISCATA DE BERNOULLI

$$x^4+y^4=2x^2-2y^2-2x^2y^2$$

$$x^4+2x^2y^2+y^4=2(x^2-y^2)$$

$$(x^2+y^2)^2=2(r^2\cos^2\theta-r^2\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$(r^2)^2=2\times r^2(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$r^2=2\cos 2\theta$$

PROBLEMA 6

La primera ley de Kepler afirma que: todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas. El Sol está en uno de los focos de la elipse. Según lo anterior la trayectoria de Júpiter en coordenadas polares es modelizada:

$$r = \frac{6}{2 - \cos\theta}$$

Donde el radio esta expresado en millones de kilómetros respecto del Sol. Entonces la longitud del eje mayor es

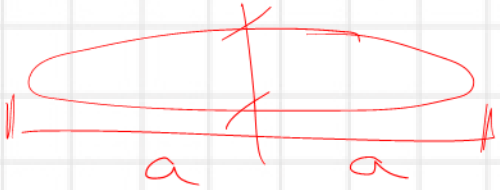
A) 4 B) 6 C) 8
D) 3 E) 10

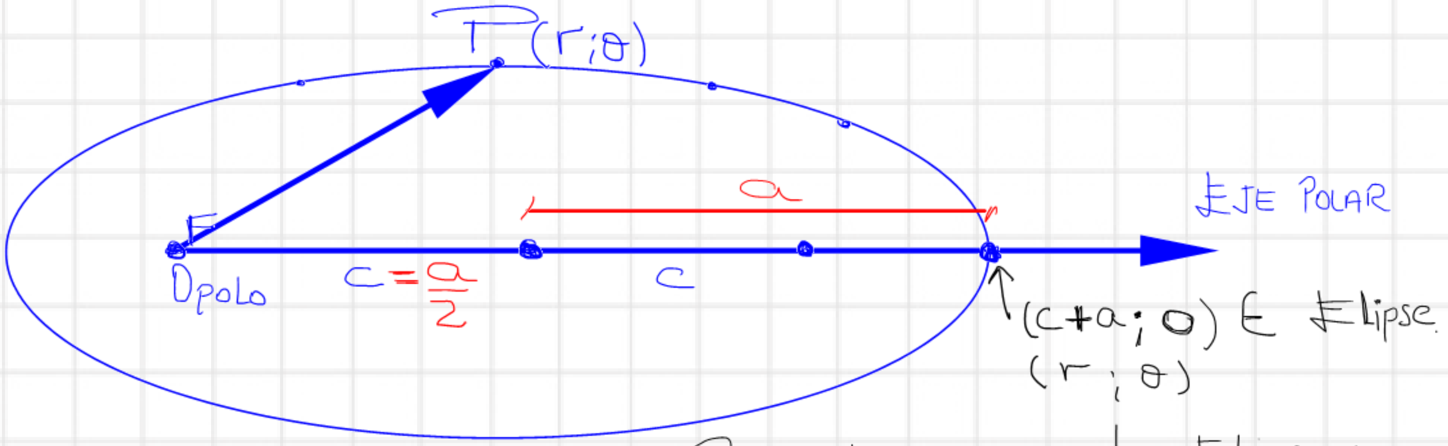
RESOLUCIÓN

(1) DATO: $r = \frac{6}{2 - \cos\theta} = \frac{3}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)\cos\theta}$

Piden: $2a$

$e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \rightarrow c = \frac{a}{2}$





$(c+a; 0) \in$ Elipse
$(r; \theta)$

Reemplazamos en la Elipse:

$r = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta} \Rightarrow c + a = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}(\cos 0)}$ (con $c = \frac{a}{2}$)

$\frac{3a}{2} = \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\frac{a}{2} = 2$

$\therefore a = 4$

Piden: eje mayor $= 2a = 8$

PROBLEMA 7

El cometa Halley sigue la trayectoria de una cónica, es cual es modelizada mediante

$$r = \frac{20}{10 - 9\operatorname{sen}\theta}$$

Cónica es VERTICAL

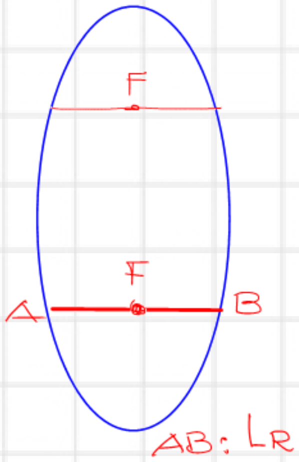
Donde el Sol está en uno de los focos de la cónica y el radio esta expresado en millones de kilómetros respecto del Sol, determine la longitud del lado recto de la cónica.

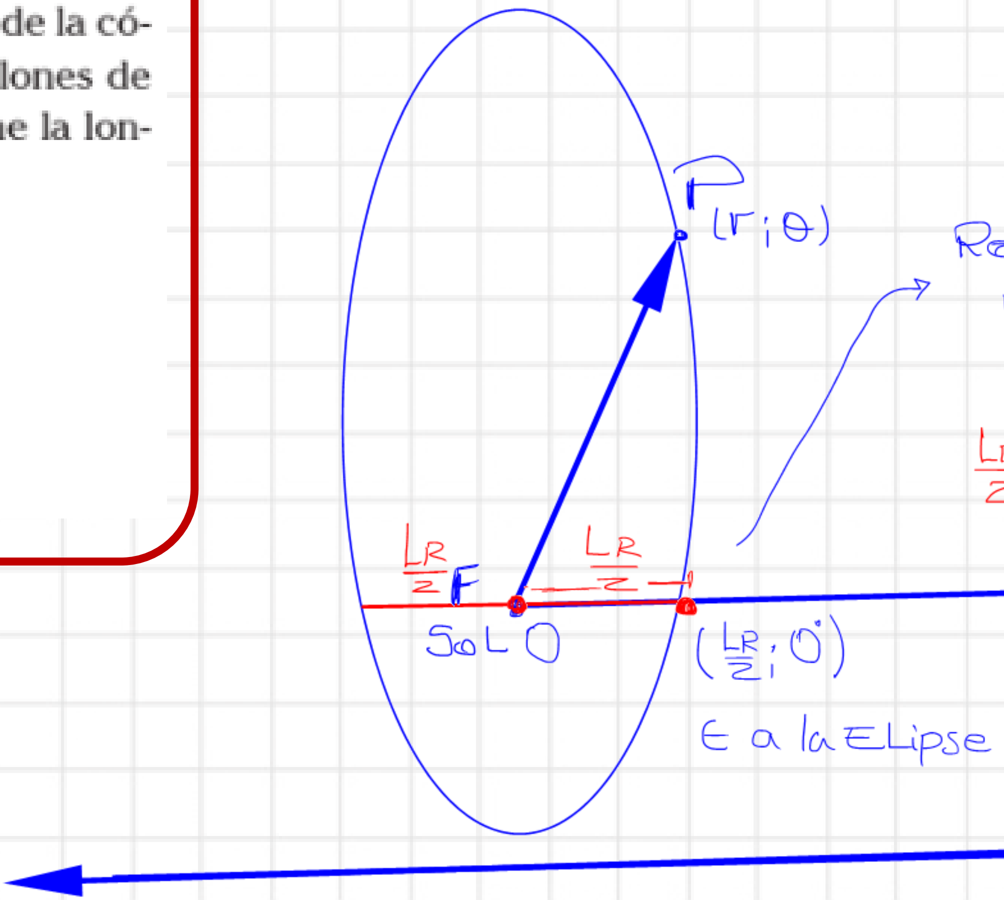
A) 6
B) 2
C) 8
D) 4
E) 10

RESOLUCIÓN

① DATO: $r = \frac{20}{10 - 9\operatorname{sen}\theta} = \frac{2}{1 - \frac{9}{10}\operatorname{sen}\theta}$

$e = \frac{9}{10} < 1 \therefore$ Elipse





Reemplazamos en la Elipse:

$r = \frac{2}{1 - \frac{9}{10}\operatorname{sen}\theta}$

$\frac{L_R}{2} = \frac{2}{1 - \frac{9}{10}\operatorname{sen}0°} \Rightarrow \frac{L_R}{2} = \frac{2}{1 - 0} = 2$

$\therefore$ $L = 4$

CLAVE D

ACADEMIA

CÉSAR VALLEJO

www.academiacesarvallejo.edu.pe